D'où $\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$.

Bilan : $\forall x \in IR^*$, on a $\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$.

b- Supposons que $h(0) = 0$; montrons que Ψ est continue en 0.

- $h(0) = 0 \Rightarrow \Psi(0) = 0$.
- $\forall x \in IR^*, \Psi(x) = \frac{2}{x}\int_0^x t.h(t)dt$

$\Rightarrow \forall x \in IR^*, |\Psi(x)| = \left|\frac{2}{x}\int_0^x t.h(t)dt\right| = \frac{2}{|x|}\left|\int_0^x t.h(t)dt\right|$

Or $\forall x \in IR^*, \left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$

D'où $\forall x \in IR^*, \frac{2}{|x|}\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}.\frac{2}{|x|} = M|x|$.

Ainsi $\forall x \in IR^*, |\Psi(x)| \leq M|x|$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} [M|x|] = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \Psi(x) = 0 = \Psi(0) \Rightarrow \Psi$ est continue en 0.

2/a- $h(t) = \sin^2 t$

- $\Psi(0) = h(0) = \sin^2 0 = 0$
- $\forall x \in IR^*, \Psi(x) = \frac{2}{x}\int_0^x t\sin^2 t dt = \frac{2}{x}\frac{1}{2}\int_0^x t(1-\cos 2t)dt$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(t) = 1-\cos 2t & \rightarrowtail & u(t) = t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ v(t) = t & \rightarrowtail & v'(t) = 1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left[\left[t\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^x - \int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[x^2 - \frac{1}{2}x\sin 2x - \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x\right]$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x}.$$

b- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \Psi(x)$.

Or $h(0) = \sin^2 0 = 0$ et $\forall x \in IR; |h(x)| = |\sin^2 t| \leq 1$

D'où, d'aprés la question précédente, Ψ est continue en 0.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \Psi(x) = \Psi(0) = h(0) = 0$.